

2024년 10월 28일 시행 Epsilon 모의고사 2회

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학기초연구학회 Epsilon
23학번 : 강주연, 박정인, 이나경, 정현우, 채상진, 하종수, 한동화
24학번 : 권서현, 김시현, 배지희, 우효정, 이학승, 장경정

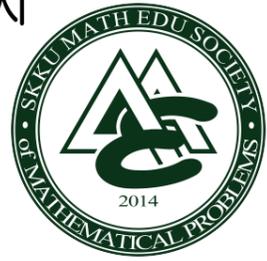
편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학기초연구학회 Epsilon 편집위원회
23학번 : 강태후, 임하준, 정원준, 한승수
24학번 : 김지율, 김진, 박예림

검토위원
20학번 김동연
22학번 고명준

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 epsilon_skku@naver.com 으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

수학 영역



Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① $3^{\frac{1}{6}}$ ② $3^{\frac{1}{5}}$ ③ $3^{\frac{1}{4}}$ ④ $3^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{1}{2}}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x - 3$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 의 값은? [2점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ 일 때,
 $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{9}$ ④ $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

4. 실수 a 에 대하여 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + k & (x < a) \\ 6x + 1 & (x \geq a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a 가 오직 하나일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_5 + 2a_8 = a_9, \quad a_4 \times a_8 = -16$$

일 때, $|a_{10}|$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

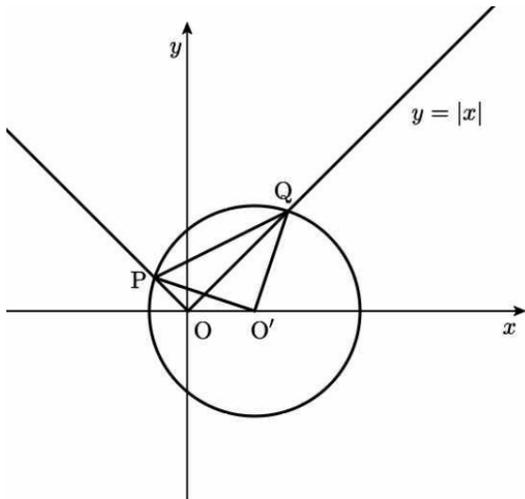
6. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x + 3$ 의 극댓값이 3일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

7. 두 양수 a, b 에 대하여 $\log_{a+1} \sqrt{b^2 - 9} = \frac{3}{4}$ 이다. $a - b = 2$ 일 때, $a \times b$ 의 값은? [3점]

- ① 8 ② 15 ③ 24 ④ 35 ⑤ 48

8. 양수 a 와 $t > \sqrt{a}$ 인 실수 t 에 대하여 점 $O'(a, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름이 t 인 원이 함수 $y = |x|$ 의 그래프와 만나는 두 점을 각각 P, Q 라 하자. 삼각형 $OO'Q$ 의 넓이가 삼각형 POO' 의 넓이의 2배일 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{a^2}$ 의 값은? (단, O 는 원점이고, 점 P 의 x 좌표는 음수이다.) [3점]



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

9. 두 양수 a, b 에 대하여 $0 \leq x \leq \frac{1}{b}$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = a \sin(b\pi x)$$

가 있다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{a}{2}$ 가 만나는 두 점을 x 좌표가 작은 점부터 차례대로 A_1, A_2 라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = a$ 가 만나는 점을 B 라 하자. 점 B 를 중심으로 하고 점 A_1, A_2 을 지나는 원이 x 축에 접할 때, $a \times b$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\sqrt{3}}{18}$
- ② $\frac{\sqrt{3}}{9}$
- ③ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- ④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
- ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{18}$

10. 양수 a 에 대하여 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q 의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치가 각각

$$x_1(t) = t^3 - at^2 + at, \quad x_2(t) = t^2 - 7t$$

이다. 오직 시간 $t = t_0$ 에서 두 점 P, Q 의 속도가 같을 때, 시간 t_0 에서 두 점 P, Q 의 가속도의 합은? [4점]

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

11. 공비가 0이 아니고 첫째항이 3인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = 2S_n + k$ 일 때, $a_3 + k$ 의 값은?

(단, k 는 상수이다.) [4점]

- ① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \int_0^x t^2 f(t) dt - \int_0^x t g(t) dt = -\frac{1}{2}x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 3x^2$$

$$(나) f(x) \times f'(x) = 2g(x)$$

$f(2)$ 의 최댓값은? [4점]

- ① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

13. 최고차항의 계수가 각각 1, -1인 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} & (f(x)+g(x) \neq 0) \\ 2 & (f(x)+g(x) = 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(4)$ 의 값은? [4점]

(가) $h(3) = 0$

(나) 함수 $\lim_{t \rightarrow x} h(t) + h(x)$ 가 $x=1$ 과 $x=2$ 에서만 최댓값 2를 갖는다.

- ① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

14. 0이 아닌 정수 t 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2^x+5}{t}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 집합 $\{x | f(x) = -x+t \text{ 또는 } g(x) = -x+t\}$ 의 원소의 개수를 $h(t)$ 라 할 때, $\sum_{n=1}^3 h(2n-10) + \sum_{n=6}^{10} h(2n-10)$ 의 값은? [4점]

- ① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-4x+b}{x-a-2} & (x < a) \\ f(x) & (x \geq a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다. (단, a, b 는 상수, $a > 0$)

- (가) 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 -4 이다.
 (나) 방정식 $g(x) = 0$ 은 적어도 서로 다른 두 실근을 가지며, 모든 근의 합은 $2a+4$ 이다.
 (다) 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_{-4}^x g(t) \{ |(t+4)^2(t+2)(t-8)| + (t+4)^2(t+2)(t-8) \} dt \geq 0$$

$3 \int_0^2 f(x)g(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① 824 ② 828 ③ 832 ④ 836 ⑤ 840

단답형

16. 방정식 $(9x)^{\log_3 x} = 27x^4$ 을 만족시키는 모든 실수 x 의 값의 곱을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 6x$ 이고 $f(1) = 5$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

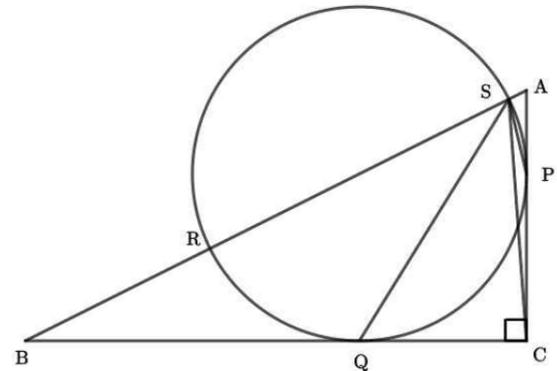
18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k)^2 = 0$ 이고 $\sum_{k=1}^{10} (a_k)^2 = 25$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k)^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

19. 최고차항의 계수가 -1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x)g(x) \geq 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $1, 2, 3$ 뿐이다.
- (나) $f(x) \leq g(x)$ 를 만족시키는 x 값의 범위는 $x \geq 2$ 이다.

$f(1) < f\left(\frac{3}{2}\right)$ 일 때, $f(3) + g(5)$ 의 값을 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 이 있다. 선분 AC 와 선분 BC 에서 접하고 중심이 선분 AB 위에 있는 원 O 가 있다. 원 O 와 선분 AC 와 선분 BC 가 접하는 점을 각각 점 P 와 Q 라고 하고, 선분 AB 와 원 O 가 만나는 점을 점 B 와 가까운 순서대로 R, S 라 하자. $\overline{QC} = 2$ 이고 삼각형 SQC 의 넓이가 $\frac{25}{8}$ 일 때, 선분 PS 의 길이가 $\frac{p - \sqrt{q}}{r}$ 이다. $p \times q \times r$ 의 값을 구하시오. (단, $\overline{PQ} > \overline{PS}$ 이고, $\angle SPQ > \frac{\pi}{2}$ 이다. p, q, r 은 자연수이고 p 와 q 는 서로소이다.) [4점]



21. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 $x \geq k$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 \leq f(x) \leq x^2 - x - 2$$

를 만족시킬 때, k 의 최솟값을 a 라고 하자. $af'(a)$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

22. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 과 수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ a_n + \frac{2a_{n+1}}{n+1} & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} -a_{n+a_1} & (n \text{이 홀수인 경우}) \\ a_n + a_1 & (n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 10$ 이고 $\sum_{k=1}^{a_1} b_k = 0$ 일 때, $a_1 + b_2$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)



Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{3}\right)$ 을 따를 때, $V(X)$ 의

값은? [2점]

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

24. 두 사건 A, B 에 대하여

$$P(A) = \frac{3}{5}, P(B^c|A) = \frac{1}{3}$$

일 때, $P(A \cap B)$ 의 값은? (단, B^c 은 B 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

25. 집합 $X = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ 에서 X 로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [3점]

(가) 집합 X 의 임의의 두 원소 $a, b (a < b)$ 에 대하여 $f(a) \leq f(b)$ 이다.

(나) $f(0) \times f(2) < 0$

- ① 75 ② 90 ③ 105 ④ 120 ⑤ 135

26. 0부터 6까지의 정수 중에서 임의로 서로 다른 2개의 수를 선택하여 작은 수를 a , 큰 수를 b 라 하자. $20a + b \geq 10^{n-1}$ 을 만족시키도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 확률변수 X 라 할 때, $E(X)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{71}{42}$ ② $\frac{12}{7}$ ③ $\frac{73}{42}$ ④ $\frac{37}{21}$ ⑤ $\frac{25}{14}$

27. 좌표평면에서 x 축의 양의 방향 또는 y 축의 양의 방향으로만 이동하며 x 좌표와 y 좌표가 모두 음이 아닌 정수로 이루어진 점에서만 방향 전환을 하는 점 P 가 있다. 점 P 가 원점에서 x 축의 양의 방향으로 출발하여 점 $(19, 19)$ 까지 움직일 때, 방향 전환을 3번 거쳐 갈 수 있는 경로의 수는? (단, 한 점에서 한 번의 방향 전환만 일어난다고 가정한다.) [3점]
- ① 256 ② 289 ③ 324 ④ 361 ⑤ 400

28. 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 카드가 있다. 이 8장의 카드를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱이 8개 이상의 양의 약수를 가지지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]
- ① 72 ② 96 ③ 120 ④ 144 ⑤ 168

단답형

29. 확률변수 X 가 평균이 12, 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(t)$ 는 $f(t) = P(t \leq X \leq t+2)$ 이고, 모든 실수 t 에 대하여

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$f(m) \geq f(t)$ 를 만족시키는 상수 m 이 존재한다. $f(m-1) + f(m+1) = 0.8664$ 일 때, 12σ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

30. 좌표평면의 원점에 점 A와 점 B가 있다. 두 개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

동전을 두 개 던져서 나온 앞면의 개수를 a , 뒷면의 개수를 b 라 할 때, 점 A를 x 축의 양의 방향으로 a , y 축의 양의 방향으로 b 만큼 평행이동한다. 이후 주사위를 굴러 나온 눈의 수를 c 라 하면 점 B를 $a \geq b$ 일 때 x 축의 양의 방향으로 c 만큼, $a < b$ 일 때 y 축의 양의 방향으로 c 만큼 평행이동한다.

위의 시행을 3번 반복한 후 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있을 확률을 $\frac{q}{p}$ 라고 할 때, $\frac{p}{9} + q$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분)



Epsilon

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x^2 + 3x + 1)}{\sin 4x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

24. 매개변수 t 로 나타내어진 곡선

$$x = e^{2t} - t^2, \quad y = \sin(2\pi t)$$

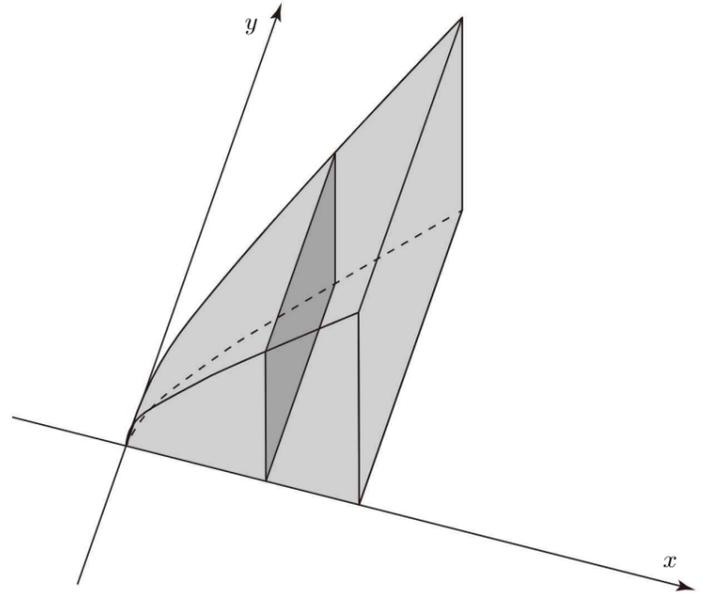
에서 $t=0$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3}{2}\pi$ ④ 2π ⑤ $\frac{5}{2}\pi$

25. 자연수 n 에 대하여 중심이 원점이고 반지름이 n 인 원이 곡선 $y = x^2$ ($x > 0$)과 만나는 점을 P라 하자. 점 P의 y 좌표를 L_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{4n}}{L_n}$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

26. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{e^x \sin x}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$)와 직선 $x = \frac{\pi}{3}$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right)e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4}$ ② $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{8}\right)e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}$
 ③ $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{4}$ ④ $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)e^{\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}$
 ⑤ $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)e^{\frac{\pi}{3}} + 1$

27. 함수 $f(x) = \int_2^x (e^{t^2} + e^{-t^2}) dt$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_0^{\frac{f(-2)}{4}} g(2x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{1}{4}(e^4 - e^{-4})$ ② $-\frac{1}{5}(e^4 - e^{-4})$ ③ $-\frac{1}{6}(e^4 - e^{-4})$
 ④ $-\frac{1}{7}(e^4 - e^{-4})$ ⑤ $-\frac{1}{8}(e^4 - e^{-4})$

28. 최고차항의 계수가 1 이고 $f'(-k) = f'(k) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(k \sin x)$ 라 하자.

함수 $y = g(x)$ 위의 x 좌표가 각각 a, b, c, d ($a < b < c < d$) 인 네 점에서의 접선으로 둘러싸인 부분은 직사각형이다. 네 실수 a, b, c, d 가 다음 조건을 만족시킬 때, k 의 값은? (단, k 는 양수이다.) [4점]

(가) $d = a + 2\pi$

(나) $\cos(a+b) + \cos(c+d) = -\left(\frac{1}{72}\right)^{\frac{1}{3}}$

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}|$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = \sum_{n=1}^{\infty} 3a_{3n}$$

이 성립한다. $\frac{a_4}{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n}}{a_n} = S$ 일 때, $24|S|$ 의 값을 구하시오.

[4점]

30. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 2 이상의 양수 a 에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |f(x)| & (x \leq 0) \\ \cos ax - \sin ax & (x > 0) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \leq \frac{2\pi}{a}$ 에서 방정식 $g(x)=1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

(나) $\{k | f(k) = g(k)\} = \{k_1, k_2\}$ 이고, $\int_0^{k_1} f(t) dt = \frac{23}{4}$ 이다.

(단, $k_1 < k_2$)

$f(-1) \times g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{67\sqrt{2}}{18}$ 일 때, $f(a)$ 의 최솟값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.