3회수학 나형 정답

1	③	2	②	3	⑤	4	①	5	②
6	①	7	④	8	⑤	9	②	10	②
11	④	12	②	13	②	14	⑤	15	④
16	③	17	②	18	①	19	③	20	①
21	③	22	47	23	200	24	14	25	9
26	18	27	64	28	26	29	228	30	120

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$\sqrt{2}\times 8^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\times 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}=4$

2. 정답 ②

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=1+a+b=0$

$\therefore\ b=-1-a\ \cdots$ ㉠

이 때, ㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax-(1+a)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1+a)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1+a)}=\frac{1}{a+2}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a=1$

한편, ㉠에서 $b=-2\ \therefore\ ab=-2$

3. [출제의도] 변환된 확률변수의 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=30$ 이므로 $\mathrm{E}(X)=50$

4. 정답 ①

$y=x^2-2x+a$의 그래프를 y축의 방향으로 -4 만큼

평행이동하면 $y+4=x^2-2x+a$이므로

$y=x^2-2x+a-4$

x축과 접하므로, $\frac{D}{4}=1-(a-4)=0$

$\therefore\ a=5$

5.[출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_1a_3=\frac{1}{36}$에서 $a^2r^2=\frac{1}{6^2}$이므로

$ar=\frac{1}{6}$ $(\because\ ar>0)$ ……㉠

$a_5=\frac{4}{81}$에서 $ar^4=\frac{4}{81}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $r=\frac{2}{3}$, $a=\frac{1}{4}$

따라서 $a_4=ar^3=\frac{2}{27}$

6. [출제의도] 미분계수의 정의를 이해하여 미정계수를 구한다.

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(1)=2+a$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\frac{1}{2}f'(1)=\frac{1}{2}(2+a)$

따라서 $\frac{1}{2}(2+a)=6$에서 $a=10$

7.[출제의도] 조건부 확률을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{4}{7}$

8.[출제의도] 확률분포를 이해하고 기댓값을 구한다.

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=k(1+2+3)=6k=1\quad\therefore k=\frac{1}{6}$

$\mathrm{E}(X)=k+4k+9k=14k=\frac{14}{6}$

$\mathrm{E}(6X+1)=6\mathrm{E}(X)+1=6\times\frac{14}{6}+1=15$

9. [출제의도] 함수의 극한을 이해하고 조건을 만족하는 값을 구한다.

$\lim_{x\to -1-0}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=2+0=2$

10. 정답 ②

삼차함수 $y=f(x)$는

① 원점에 대하여 대칭(기함수)이므로

$f(x)=ax^3+bx$로 놓을 수 있다.

② $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(x)=3ax+b$에서

$f'(1)=3a+b=0$

$\therefore\ b=-3a\ \cdots$ ③

③을 ①에 대입하면 $f(x)=ax^3-3ax$이므로

x축과의 교점은 $ax^3-3ax=0$에서

$x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

따라서, x좌표 중 양수인 것은 $\sqrt{3}$이다.

11. 정답 ④

체감온도 T는 $T=t-4\sqrt{v}+12I$에서

오전과 오후의 체감온도가 같으므로

$(t+6)-4\sqrt{4v}+12I=t-4\sqrt{v}+12I$에서

$6=4\sqrt{v}\quad\therefore\ v=\frac{9}{4}$

12.[출제의도] 정규분포를 활용하여 실생활과 관련된 문제를 해결한다.

임의로 추출된 야구공 9개 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(144.9,\ 2^2)$을 따른다.

$\mathrm{P}(141.7\le\overline{X}\le 148.9)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{141.7-144.9}{2}\le Z\le\frac{148.9-144.9}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.6\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.6)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.9224$

13. [출제의도] 무한급수와 일반항 사이의 관계 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{a_n}{9^n}\right)=0$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{9^n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{9^n}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\times\frac{a_n}{9^n}+\frac{1}{9^n}}=\frac{1}{4}$

14.정답 ⑤

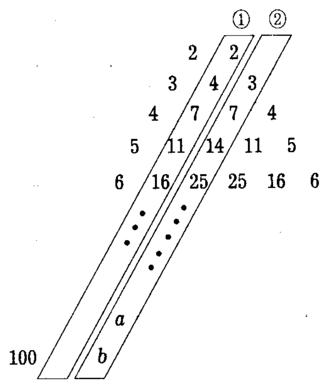
②번 대각선 3, 7, 14, 25, …의 계차수열이 ①이므로

수열 2, 4, 7, 11, 16, …의 일반항은

$a_n=\frac{n^2+n+2}{2}$이다.

따라서, $b-a$는 a_{98}이다.

$\therefore\ a_{98}=\frac{98^2+98+2}{2}=4852$



15. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_c b=\frac{1}{2}\log_a b$이므로 $\log_b c=2\log_b a$

$\therefore\ c=a^2$

$\log_b c=\frac{1}{3}\log_a c$이므로 $\log_c b=3\log_c a$

$\therefore\ b=a^3$

a, b, c는 1보다 크고 10보다 작은 자연수이므로

$a=2$, $b=8$, $c=4$

따라서 $a+2b+3c=30$

16. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 추론한다.

$n=2m-1$을 대입하면 $\frac{a_{2m+1}}{a_{2m-1}}=\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

그러므로 (가)는 $\frac{(2m-1)^2}{2m(2m+1)}$

$m-1$개의 식을 곱하여 정리하면

$\frac{a_{2m+1}}{a_1}=\frac{1^2\times 3^2\times 5^2\times\cdots\times(2m-1)^2}{2\times 3\times 4\times 5\times\cdots\times(2m+1)}$

$a_{2m+1}=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2m-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2m}\times\frac{1}{2m+1}$

그러므로 (나)는 $\frac{1}{2m+1}$

따라서 $f(5)\times g(4)=\frac{9}{110}$

17. 출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 x좌표를 추론한다.

$\mathrm{A}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{B}(2^a,\ a)$이고 $\mathrm{C}(\log_2 a,\ a)$이다.

$\overline{AB}=12\sqrt{2}$, $2(2^a-a)^2=288$, $2^a-a=12$ ⋯ ㉠
점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=2^a-a=12$이므로 $\overline{BC}=14$이다.
그러므로 $2^a-\log_2 a=14$ ⋯ ㉡
㉡-㉠으로부터 $a-\log_2 a=2$

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.

점 A_2를 지나고 선분 B_1C_1에 평행한 직선과 선분 A_1B_1, 선분 A_1C_1의 교점을 각각 P, Q라 하자.
두 삼각형 $A_1B_1C_1$, A_1PQ의 닮음비는 3:2, 두 삼각형 A_1PQ, $A_2B_2C_2$의 닮음비는 2:1이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$과 삼각형 $A_2B_2C_2$의 닮음비는 3:1
그러므로 과 의 넓이의 비는 9:1

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2-\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

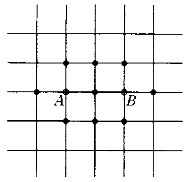
$$=\frac{7}{6}\sqrt{3}-\frac{2}{9}\pi \quad \therefore \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt{3}-4\pi)$$

19. 답 ③

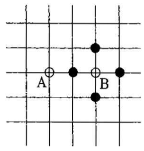
다항함수 $f(x)$가 $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$,
$f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_{n-1}(x)$ (n은 자연수)
을 만족하므로, $x=0$을 대입하면
$f_0(0)=1$, $f_1(0)=0$
이 때, $n=1$을 대입하면,
$f_2(0)=0\cdot f_1(0)+f_0(0)=1$
같은 방법으로, $f_3(0)=0\cdot f_2(0)+f_1(0)=0$
⋮
따라서 짝수 번째항은 1, 홀수 번째 항은 0,
즉, $f_{2n-1}(0)=0$, $f_{2n}(0)=1$이다.
또한, $f_0(x)$는 우함수이고, $f_1(x)$는 기함수이므로
$f_2(x)=xf_1(x)+f_0(x)$는 우함수이다.
(기함수・기함수=우함수, 우함수+우함수=우함수)
같은 방법으로 $f_3(x)=xf_2(x)+f_1(x)$는 기함수이다.
즉, 홀수 번째 항은 모두 기함수이고,
짝수 번째항은 모두 우함수이다.
따라서, $f_{2n-1}(x)$: 기함수, $f_{2n}(x)$: 우함수
한편, $f_2(x)=xf_1(x)+f_0(x)$에서
$f_1(x)$이 1차이므로 $f_2(x)$의 차수는 2차이다.
같은 방법으로 $f_3(x)=xf_2(x)+f_1(x)$에서
$f_2(x)$이 2차이므로 $f_3(x)$의 차수는 3차이다.
즉, $f_n(x)$은 n차 다항식이다.
이 때, $f_{2n-1}(x)$은 $2n-1$차 다항식이고, 기함수이므로,
항 중에 짝수차 항이 없으므로,
$0, 1, 2, 3, \cdots, 2n-1$
중 짝수를 뺀 $1, 3, 5, \cdots, 2n-1$
은 모두 n개의 홀수이므로
$f_{2n-1}(x)$은 n개의 항을 갖는 다항식이다.
하지만, $f_{2n}(x)$은 모두 $2n+1$개의 항 중에
$0, 1, 2, 3, 4, \cdots, 2n-1, 2n$
짝수차수를 갖는 항은 $0, 2, 4, 6, \cdots, 2n$으로 0부터이므로 모두 $n+1$개이다.

20. 정답 ①

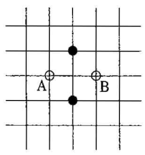
두 차량이 움직인 거리를 각각 x, y라 하면
$x+y=4$ (단, x, y는 양의 정수)
$\therefore x=1,\ y=3$ 또는 $x=2,\ y=2$ 또는 $x=3,\ y=1$



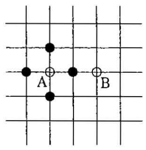
각각의 경우에 해당하는 점 P의 위치를 모두 모아서 그림으로 나타내면 위와 같다.
[참고]
두 차량 A, B가 움직인 거리의 합이 4가 되기 위해서는 3가지 경우가 있다.
ⅰ) A가 움직인 거리가 3, b가 움직인 거리가 1인 경우



ⅱ) A가 움직인 거리가 2, B가 움직인 거리가 2인 경우



ⅲ) A가 움직인 거리가 1, B가 움직인 거리가 3인 경우



21. 답 ③

[정적분과 넓이]
ㄱ. 구간 $[a,\ b]$에서 $F'(x)=f(x)>0$ 이므로 함수 $F(x)$는 증가함수이다. (참)
ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (거짓)
ㄷ. 점 Q에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 놓으면
$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=\triangle PQR$

$$\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(b)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx-\square QRAB$$

$$\therefore \int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$$

$$\le\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2} \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. 정답 47

$$\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=\sum_{k=2}^{10}f(k)$$

$$\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=\sum_{k=1}^{9}f(k)$$

따라서, $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}f(k+1)=f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$$\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=f(1)+f(2)+\cdots+f(9)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{9}f(k+1)-\sum_{k=2}^{10}f(k-1)=f(10)-f(1)$$

$$=50-3=47$$

23. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 계산한다.

$$\int_0^{10}(x+1)^2dx-\int_0^{10}(x-1)^2dx=\int_0^{10}4x\,dx=200$$

24. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to-2}(x+2)=0$이고 $\displaystyle\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}=6$
이므로 $\displaystyle\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}-b)=0$
$\therefore b=\sqrt{a-2}$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-b}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-2}}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-2})=2\sqrt{a-2}=6$$

$\therefore a=11,\ b=3$
따라서 $a+b=14$

25. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$
$5=6^{2b}=(3^a)^{2b}=3^{2ab}$
따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=(3^{2ab})^{\frac{1}{ab}}=3^2=9$
[다른 풀이]
$3^{a-1}=2$에서 $3^a=6$이므로 $a=\log_3 6$
$6^{2b}=5$이므로 $b=\dfrac{1}{2}\log_6 5$
$ab=\dfrac{1}{2}\log_3 6\times\log_6 5=\dfrac{1}{2}\log_3 5$
따라서 $5^{\frac{1}{ab}}=5^{2\log_5 3}=9$

26. [출제의도] 이항분포를 이해하여 n을 구한다.

$E(3X)=3E(X)=18$에서 $E(X)=np=6$ ⋯ ㉠
$E(3X^2)=3E(X^2)=120$이므로 $E(X^2)=40$
$V(X)=np(1-p)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$6(1-p)=40-6^2=4$ 이므로 $p=\frac{1}{3}$

따라서 ㉠에 대입하면 $n=18$

27. [출제의도] 무한수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$에서

$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OP}_n}=n+2$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}_n}=\frac{1}{2}(n+2)$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}(n+2)$

$\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}$

S_n은 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이에서 원 C_n의 넓이의 $\frac{1}{6}$을 빼면 된다.

$\therefore\ S_n=\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\frac{n\pi}{6}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\frac{n\pi}{6}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=a$

따라서 $3a^2=64$

28. [출제의도] 표본평균의 확률분포를 이해하여 기댓값을 구한다.

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)=\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{49}$ 에서 $n=6$

$\mathrm{E}(\overline{X})$는 모평균과 같으므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{1+3n}{7}=\frac{19}{7}$ 이므로 $p+q=26$

29.답 228

5개의 공을 상자 A, B, C에 넣는 전체 방법의 수는

$3^5=243$

합이 13 이상이 되는 경우는

$\{(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)\}$, $\{(1),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)\}$,

$\{(2),\ (1,\ 3,\ 4,\ 5)\}$

$\therefore\ 243-(3+3\times2+3\times2)=228$

30. 정답] 120

[출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

a_n부터 a_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 1, 2, 2, 0, 0이므로 S_n부터 S_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면

1, 2, 1, 0, 0, 0이다. (단, $n=6k-5$, k는 자연수)

따라서 $40\times3=120$