3회수학 가형 정답

1	①	2	⑤	3	⑤	4	②	5	⑤
6	③	7	④	8	④	9	②	10	④
11	①	12	④	13	⑤	14	②	15	②
16	①	17	②	18	①	19	①	20	③
21	⑤	22	12	23	14	24	19	25	18
26	16	27	6	28	26	29	228	30	134

해 설

1. 정답 ①

준식을 x에 대해 미분하면

$f'(x)=(x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'$

$=2xe^x+(e^x+1)e^x$

$=x^2e^x+2xe^x+e^x$

$\therefore f'(0)=e^0=1$

2.답 정답 ⑤

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{17}$

$|\vec{b}|=\sqrt{1+(-4)^2+0}=\sqrt{17}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot1+(-3)\cdot(-4)+2\cdot0=14$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{14}{\sqrt{17}\sqrt{17}}=\dfrac{14}{17}$

3. [출제의도] 변환된 확률변수의 평균을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{E}(Y)=\dfrac{1}{2}\mathrm{E}(X)+5=30$ 이므로 $\mathrm{E}(X)=50$

4. 정답 ②

$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 위 의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$\dfrac{2x}{2}-1\cdot y=1,\ x-y=1$

$\therefore y=x-1$

따라서 구하는 이 접선의 y절편은 -1이다.

5. [출제의도] 벡터의 성질을 이해하여 크기를 구한다.

$\vec{a}+\vec{b}=(2,3)+(1,1)=(3,4)$

$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

6.정답 ③

$f(x)-2\displaystyle\int_0^x e^t f(t)\,dt=1$ 에서

① $f(0)-0=1 \quad \therefore f(0)=1$

② $f'(x)-2e^x\cdot f(x)=0$이므로 $f'(0)-2f(0)=0$

$\therefore f'(0)=2$

③ $f''(x)-2(e^x\cdot f(x)+e^x\cdot f'(x))=0$이므로

$f''(0)-2(f(0)+f'(0))=0$

$\therefore f''(0)=2(1+2)=6$

7.[출제의도] 조건부 확률을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{7}{12}$

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{4}{7}$

8.정답 ④

A팀부터 B팀이 5 : 4 로 이기는 경우는 아래와 같이

5가지 경우이다.

A	B
×	○
○	○
○	○
○	○
○	○

A	B
○	○
×	○
○	○
○	○
○	○

A	B
○	○
○	○
×	○
○	○
○	○

A	B
○	○
○	○
○	○
×	○
○	○

A	B
○	○
○	○
○	○
○	○
×	○

$\therefore\ 5\times(0.8)^4(0.2)\times(0.8)^5=0.8^9$

9. [출제의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한값 사이의 관계를 이해하여 극한값을 구한다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=5$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n}{n+3}\right)=0$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+3}=2$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-2n}{a_n+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5a_n}{n}-2}{\frac{a_n}{n}+2+\frac{1}{n}}=2$

10. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 관련된 외적 문제를 해결한다.

30분 후 농도가 2 ng/mL이므로

$\log(10-2)=1-30k,\ k=\dfrac{1}{30}\log\left(\dfrac{5}{4}\right)$

60분 후 농도가 a이므로 $\log(10-a)=1-60k$

$\log(10-a)=1-2\log\left(\dfrac{5}{4}\right)=\log\left(\dfrac{32}{5}\right)$

따라서 $a=\dfrac{18}{5}=3.6$

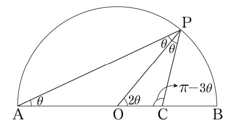
11. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기를 추측한다.

신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[0.2-1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}},\ 0.2+1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}\right]$

$2\times1.96\times\dfrac{\sqrt{0.2\times0.8}}{\sqrt{n}}=0.112$ 이므로 $n=196$

12. [출제의도] 사인법칙을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구하는 문제를 해결한다.



삼각형 POC에서 사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{OC}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$ 이므로

$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\overline{\mathrm{OC}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

13. [출제의도] 직각이등변삼각형을 이용하여 수열의 합을 구하는 문제를 해결한다.

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 4인 등차수열

이므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}a_n=\frac{5(2\times4+4\times4)}{2}=60$

14.[출제의도] 타원의 성질을 이해하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

타원의 장축의 길이를 $2a$라 하면 삼각형 FPQ의 둘레의 길이가 $12\sqrt{2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF}}=(\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}})+(\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}})$

$=4a=12\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PF'}}=a=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{F'Q}}=k$라 하면 삼각형 FPQ는 직각삼각형이므로

$(k+3\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=(6\sqrt{2}-k)^2$에서 $k=\sqrt{2}$

따라서 구하는 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=12$

15. 정답 ②

그림에서 l_1은 직선 $y=a(x-1)$이 원

$(x+1)^2+y^2=1$

에 접하는 것이므로

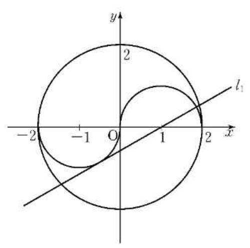
원의 중심 $(-1,\ 0)$에서 직선 $a(x-1)-y=0$에 이르는

거리 d는 $d=\dfrac{|-2a|}{\sqrt{a^2+1}}=1$이므로

$|2a|=\sqrt{a^2+1},\ \ 3a^2=1$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \ (\because a>0)$

$\therefore 0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



16. 정답 ①

주어진 식 $f(g(x))=\displaystyle\int_0^x f(t)g(t)dt-xe^x+3$

의 양변을

x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=f(x)g(x)-(1+x)e^x$

이 때, 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=e^x$을 대입하면

$ae^x=(ax+b)e^x-(1+x)e^x$

$=\{(a-1)x+(b-1)\}\cdot e^x$

$\therefore\ a-1=0,\ a=b-1$

즉, $a=1,\ b=2$

따라서 $f(2)=1\cdot 2+2=4$이다.

17. [출제의도] 중복조합의 성질을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 자리 자연수의 각 자리의 수를 각각 $x,\ y,\ z,\ w$라 하면 $x+y+z+w=14$

$x,\ y,\ z,\ w$가 모두 홀수이므로

$x=2a+1,\ y=2b+1,\ z=2c+1,\ w=2d+1$

(단, $a,\ b,\ c,\ d$는 0이상 4이하의 정수)

$(2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2d+1)=14$

$a+b+c+d=5$

$a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 5개를 택한다. 이때 $a,\ b,\ c,\ d$는 4이하의 정수이므로 한 가지만 5번 택하는 4가지 경우는 제외한다.

$${}_4\mathrm{H}_5-4={}_{4+5-1}\mathrm{C}_5-4={}_8\mathrm{C}_5-4=\frac{8!}{5!3!}-4=52$$

18. [출제의도] 등비수열의 일반항을 추측하여 무한등비급수의 합을 구한다.

점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 평행한 직선과 선분 $\mathrm{A_1B_1}$, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$의 교점을 각각 P, Q라 하자.

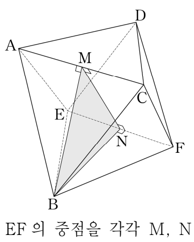
두 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$, $\mathrm{A_1PQ}$의 닮음비는 $3:2$, 두 삼각형 $\mathrm{A_1PQ}$, $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 닮음비는 $2:1$이므로 삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$과 삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 닮음비는 $3:1$

그러므로 과 의 넓이의 비는 $9:1$

$$S_1=\left\{\left(\frac{\sqrt3}{4}\times2^2-\pi\left(\frac{\sqrt3}{3}\right)^2\right\}\times\frac{2}{3}+2\times\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{7}{6}\sqrt3-\frac{2}{9}\pi\quad\therefore\ \frac{S_1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{1}{16}(21\sqrt3-4\pi)$$

19. [출제의도] 정사영의 성질을 이해하여 넓이를 구한다.



선분 AC와 EF의 중점을 각각 M, N이라 하면

사각형 AEFC가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{MN}}=2$

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt3$

$\cos(\angle\mathrm{MBN})=\dfrac{(\sqrt3)^2+(\sqrt3)^2-2^2}{2\times\sqrt3\times\sqrt3}=\dfrac{1}{3}$이므로

$S_1=\left(\dfrac{\sqrt3}{4}\times2^2\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt3}{3}$

두 평면 BEF와 CBF가 이루는 각의 크기는 두 평면 ACD와 ABC가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 BEF와 평면 ACD가 평행하므로

$S_2=S_1=\dfrac{\sqrt3}{3}\quad\therefore\ S_1+S_2=\dfrac{2\sqrt3}{3}$

20. 답 ③

[정적분과 넓이]

ㄱ. 구간 $[a,\ b]$에서 $F'(x)=f(x)>0$이므로 함수 $F(x)$는 증가함수이다. (참)

ㄴ. 직선 PQ의 기울기는 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (거짓)

ㄷ. 점 Q에서 직선 PA에 내린 수선의 발을 R라 놓으면

$\dfrac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}=\triangle\mathrm{PQR}$

$$\int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f(b)dx$$

$$=\int_a^b f(x)dx-\square QRAB$$

$$\therefore\ \int_a^b\{f(x)-f(b)\}dx$$

$$\le\frac{(b-a)\{f(a)-f(b)\}}{2}\quad(\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 적분법을 이용하여 방정식의 근의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

함수 $f(x)$는 주기가 2이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 실수 t와 정수 k에 대하여

$$\int_t^{t+2k}f(x)dx=0,\ \int_{-t}^{t+2k}f(x)dx=0$$

따라서 구간 $[-1,1]$에서 방정식 $h(x)=0$

즉 $\displaystyle\int_{g(x)}^{g(x+1)}f(t)\,dt=0$을 만족시키려면

$g(x+1)-g(x)=2n$ (n은 정수)

또는 $g(x+1)+g(x)=2m$ (m은 정수)이어야 한다.

$g(x)=x(x+1)$이므로 $g(x+1)-g(x)=2(x+1)$

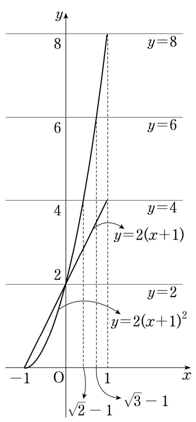
$g(x+1)+g(x)=2(x+1)^2$

구간 $[-1,1]$에서 두 함수 $y=2(x+1)$,

$y=2(x+1)^2$의 그래프는 그림과 같으므로

$2(x+1)=2n$(n은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ 1$이고, $2(x+1)^2=2m$(m은 정수)를 만족시키는 x의 값은 $-1,\ 0,\ \sqrt2-1,\ \sqrt3-1,\ 1$이다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 5



22. 정답 12

두 벡터는 수직이므로 내적은 0이다.

따라서

$\vec{a}=(9,\ x+1,\ -12)$, $\vec{b}=(-8,\ x,\ 7)$로부터

$\vec{a}\circ\vec{b}=9\times(-8)+(x+1)\times x+(-12)\times7$

$=-72+x^2+x-84=0$

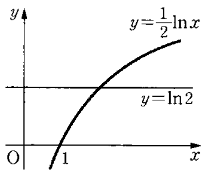
$x^2+x-156=0,\ (x+13)(x-12)=0$

$\therefore\ x=12\ (\because\ x>0)$

23. [출제의도] 미분계수의 값을 계산한다.

$f'(x)=14xe^{x^2-1}$이므로 $f'(1)=14$

24.정답 19



y축의 둘레로 회전시켜 생긴 회전체의 부피는

$$V=\pi\int_0^{\ln2}x^2dy=\pi\int_0^{\ln2}\left(e^{2y}\right)^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\ln2}e^{4y}dy$$

$$=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4y}\right]_0^{\ln2}=\frac{\pi}{4}\left(e^{\ln2^4}-1\right)=\frac{\pi}{4}\left(2^4-1\right)$$

$$=\frac{15}{4}\pi$$

$\therefore\ \dfrac{V}{\pi}=\dfrac{15}{4}=\dfrac{q}{p},\ \ p=4,\ q=15,$

$\therefore p+q=19$

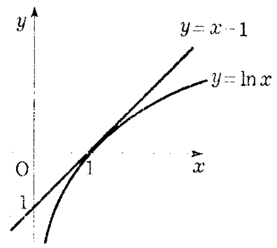
25. 정답 18

$y=\ln x$, $y=x+n-20$의 교점으로 해석한다.

$y=\ln x$에서 기울기 1인 접선은 $y=x-1$이므로

서로 다른 두 근을 가지려면 $n-20<-1$이어야 한다.

$\therefore\ 0<n<19$에서 자연수 n은 18이다.



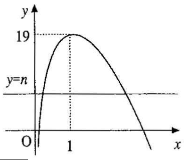
[별해]

$\ln x-x+20-n=0$에서

$y=\ln x-x+20$과 $y=20$이 서로 다른 두 점에서

만나면 된다.

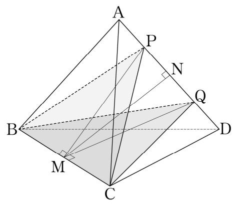
$y'=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}\ \Rightarrow x=1$일 때 $y'=0$



x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	19	$\searrow$

x는 진수이므로 $x>0$
$\therefore$ $n<19$이면 서로 다른
두 점에서 만난다.
따라서 자연수 n은 1, 2, 3, $\cdots$, 18로 18개다.

26. [출제의도] 이면각의 정의를 이해하여 이면각의 크기를 구한다.



두 선분 BC, AD의 중점을 각각 M, N이라 하면,
$\overline{AM}=\overline{DM}=2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{MN}=2\sqrt{2}$
$\overline{PN}=\overline{QN}=1$ 이므로 $\overline{PM}=\overline{QM}=3$
$\theta=\angle PMQ$ 이고, $\overline{PQ}=2$ 이므로
$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\dfrac{7}{9}$, 따라서 $p+q=16$

27. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이해하여 정적분의 값을 구한다.
$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx=-4$ 에서 $x+1=t$로 놓으면
$\dfrac{dx}{dt}=1$ 이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$
$\int_0^1(x-1)f'(x+1)dx$
$=\int_1^2(t-2)f'(t)dt=\Big[(t-2)f(t)\Big]_1^2-\int_1^2 f(t)dt$
$=f(1)-\int_1^2 f(t)dt=2-\int_1^2 f(t)dt=-4$
따라서 $\int_1^2 f(x)dx=6$

28. [출제의도] 표본평균의 확률분포를 이해하여 기댓값을 구한다.
$P(\overline{X}=1)=\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{49}$ 에서 $n=6$
$E(\overline{X})$는 모평균과 같으므로
$E(\overline{X})=\dfrac{1+3n}{7}=\dfrac{19}{7}$ 이므로 $p+q=26$

29. 답 228
5개의 공을 상자 A, B, C에 넣는 전체 방법의 수는
$3^5=243$
합이 13 이상이 되는 경우는
$\{(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)\}$, $\{(1),\ (2,\ 3,\ 4,\ 5)\}$,
$\{(2),\ (1,\ 3,\ 4,\ 5)\}$
$\therefore$ $243-(3+3\times2+3\times2)=228$

30. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제를 해결한다.
원 C의 중심을 O$'$이라 하면
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B})$
$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}$
평면 $x-y+z-6=0$을 α라 하면 구의 중심과 점 O$'$을 지나는 직선 위의 점의 좌표가 $(t,\ -t,\ t+3)$이고 점 O$'$이 평면 α 위의 점이므로
O$'(1,\ -1,\ 4)$이다. 따라서 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OO'}=12$
구 S의 중심에서 평면 α까지의 거리 $\sqrt{3}$, 구의 반지름의 길이 2에서 원 C의 반지름의 길이는 1 평면 α와 직선 OA가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{(1,-1,1)\cdot(\sqrt{2},\sqrt{2},3)}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{2+2+9}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$
$\overline{OA}=\sqrt{13}$, $\overline{O'B}=1$ 이고, $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{O'B}$가 이루는 각의 크기를 β라 하면 $\theta\le\beta\le\pi-\theta$ 이므로
$\cos(\pi-\theta)\le\cos\beta\le\cos\theta$
$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$, $\overline{OA}=\sqrt{13}$, $\overline{O'B}=1$ 이고
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{O'B}|\cos\beta$ 이므로
$-\sqrt{10}\le\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O'B}\le\sqrt{10}$
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 최댓값은 $12+\sqrt{10}$, 최솟값은 $12-\sqrt{10}$ 이므로 곱은 134